第41卷第1期 西南大学学报(自然科学版) 2019年1月
Vol. 41 No. 1 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Jan. 2019

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.01.012

幂赋范极值分布的条件矩刻画[14]

彭 茜, 周 玮, 彭作祥

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: $\{X_n\}$ 为独立同分布的离散型随机变量序列, 其分布函数为 $F(x)$. 得到了 $F(x)$ 属于幂赋范极值分布吸引场的条件矩刻画.

关 键 词: 幂赋范极值分布; 条件矩; 吸引场

中图分类号: O211.3 文献标志码: A 文章编号: 1673-9868(2019)01-0078-06

设 $\{X_n\}$ 是独立同分布随机变量序列, 公共分布函数 $F(x)$, 记其部分最大值 $M_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{X_k\}$, 若存在规范化常数序列 $\alpha_n>0$, $\beta_n>0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(M_n\leqslant\alpha_n\mid x\mid^{\beta_n}\operatorname{sign}(x))=\lim_{n\to\infty}F^n(\alpha_n\mid x\mid^{\beta_n}\operatorname{sign}(x))=H(x)\tag{1}$$

其中 $\operatorname{sign}(x)$ 是符号函数, $H(x)$ 为非退化分布函数, 且如果(1)式成立, 则称 $F(x)$ 属于幂赋范极值分布 $H(x)$ 的吸引场, 记作 $F\in D_p(H)$. 由文献[1]可知, $H(x)$ 是以下6种类型之一:

$$\text{Ⅰ}: H_{1,\alpha}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 1\\ \exp(-(\log x)^{-\alpha}) & x>1\end{cases}$$

$$\text{Ⅱ}: H_{2,\alpha}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ \exp(-(-\log x)^{\alpha}) & 0<x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$$

$$\text{Ⅲ}: H_{3,\alpha}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant -1\\ \exp(-(-\log(-x))^{-\alpha}) & -1<x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases}$$

$$\text{Ⅳ}: H_{4,\alpha}(x)=\begin{cases}\exp(-(\log(-x))^{\alpha}) & x\leqslant -1\\ 1 & x\geqslant -1\end{cases}$$

$$\text{Ⅴ}: \Phi(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & x>0\end{cases}$$

$$\text{Ⅵ}: \Psi(x)=\begin{cases}\exp(x) & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases}$$

其中 α 为大于0的常数.

文献[2]研究了6种类型的分布函数属于幂赋范条件下的吸引场的充要条件; 文献[3]研究了在幂赋范下极值的矩收敛和密度函数收敛. 使用条件矩刻画 F 属于给定的极值分布, 在线性赋范情形文献[4]得到 F 属于 Λ 的极值吸引场的条件矩刻画; 文献[5]得到 F 属于 Φ_α 和 Ψ_α 的条件矩刻画. 本文将研究在幂赋范条

[14] 收稿日期: 2017-11-08
基金项目: 国家自然科学基金项目(11701469); 重庆市基础与前沿研究计划项目(csts2016jcyjA0510).
作者简介: 彭 茜(1994-), 女, 硕士研究生, 主要从事极值理论研究.
通信作者: 周 玮, 硕士研究生.

件下，F 分别属于上述 $H_{1,\alpha}$，$H_{2,\alpha}$，$H_{3,\alpha}$，$H_{4,\alpha}$，$\Psi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 6 种吸引场的条件矩刻画（见定理 1—定理 6）. 为证明主要结论，需要引用下面的结论.

引理 1[4]　设 U：$\mathrm{R}^+ \longrightarrow \mathrm{R}^+$，且

$$U(t)=\int_t^{\infty} u(s)\mathrm{d}s$$

是有限的. 如果

$$\lim_{t\to\infty}\frac{tu(t)}{U(t)}=\rho \tag{2}$$

那么 $U(t)\in RV_{-\rho}$. 相反地，如果 $U(t)\in RV_{-\rho}$，$\rho>0$，且 $u(t)>0$ 为减函数，那么(2) 式成立，且 $u(t)\in RV_{-\rho-1}$.

为统一符号，定义 $r(F)=\sup\{x \mid F(x)<1\}$ 为分布函数 $F(x)$ 的上端点.

定理 1　若 $r_F=\infty$. 定义

$$\mu_p(t)=E\{((\log|X|)-t)^p \mid (\log|X|)>t\}$$

如果 $F\in D_p(H_{1,\alpha})$，$\alpha>2$，那么对于 $0\leqslant p<\alpha-2$，$\mu_{p+2}(t)<\infty$ 且 $t\to\infty$ 时，

$$\frac{\mu_p(t)\mu_{p+2}(t)}{\{\mu_{p+1}(t)\}^2}\to\frac{(p+2)(\alpha-p-1)}{(p+1)(\alpha-p-2)} \tag{3}$$

反之，当 $\alpha>2$ 时，对 $0\leqslant p<\alpha-2$，如果(3) 式成立，那么 $F\in D_p(H_{1,\alpha})$.

证　关于必要性：由文献[2] 之定理 2.1 知，$F\in D_p(H_{1,\alpha})$ 的充要条件为对于 $y>0$ 时，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F(\exp(ty))}{1-F(\exp(t))}=y^{-\alpha}$$

故 $\alpha>2$ 时有

$$\begin{aligned}\mu_p(t)&=E\{((\log|X|)-t)^p \mid (\log|X|)>t\}=\\&\int_{\exp(t)}^{\infty}\frac{((\log|x|)-t)^p\mathrm{d}F(x)}{1-F(\exp(t))}=pt^p\int_1^{\infty}(u-1)^{p-1}\frac{1-F(\exp(tu))}{1-F(\exp(t))}\mathrm{d}u\to\\&pt^p\int_1^{\infty}(u-1)^{p-1}u^{-\alpha}\mathrm{d}u，\alpha>0=\frac{\Gamma(\alpha-p)\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha)}t^p\end{aligned} \tag{4}$$

显然，这对 $p=0$ 也成立. 由(4) 式知(3) 式成立.

对于充分性，若(3) 式成立. 定义

$$J_p(t)=\{\Gamma(p+1)\}^{-1}\int_{\exp(t)}^{\infty}((\log|x|)-t)^p\mathrm{d}F(x)$$

对任意的 $\delta\geqslant-1$，有

$$\begin{aligned}\int_t^{\infty}(u-t)^{\delta}J_p(u)\mathrm{d}u&=\{\Gamma(p+1)\}^{-1}\int_t^{\infty}\int_{\exp(u)}^{\infty}(u-t)^{\delta}((\log|x|)-u)^p\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}u=\\&\{\Gamma(p+1)\}^{-1}\int_{\exp(t)}^{\infty}\int_t^{\log|x|}(u-t)^{\delta}((\log|x|)-u)^p\mathrm{d}u\mathrm{d}F(x)=\\&\frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(p+\delta+2)}\int_{\exp(t)}^{\infty}((\log|x|)-t)^{p+\delta}\mathrm{d}F(x)=\\&\Gamma(\delta+1)J_{\delta+p+1}(t)\end{aligned} \tag{5}$$

特别地，当 $t\to\infty$ 时，

$$J_{p+1}(t)=\int_t^{\infty}J_p(u)\mathrm{d}u\downarrow 0 \tag{6}$$

利用以下关系式

$$\mu_p(t)=\frac{\Gamma(p+1)}{1-F(\exp(t))}J_p(t)$$

则式(3) 可写为

$$\frac{J(t)J_{p+2}(t)}{\{J_{p+1}(t)\}^2}\to\frac{\alpha-p-1}{\alpha-p-2} \tag{7}$$

其中 $0 \leqslant p < \alpha - 2$.

如果式(7)对 $p=0$ 成立，那么设 $J_0^*(t) = \dfrac{J_1^2(t)}{J_2(t)}$，则 $\dfrac{J_0(t)}{J_0^*(t)} \to \dfrac{\alpha-1}{\alpha-2}$. 只需证 $J_0^*(t) \in RV_{-\alpha}$. 由于

$$(J_0^*(t))' = \left(\frac{J_1^2(t)}{J_2(t)}\right)' = \frac{J_1^3(t)}{J_2^2(t)}\left(1 - \frac{2J_0(t)J_2(t)}{J_1^2(t)}\right) = -\frac{1}{t}J_0^*(t)\frac{t}{f(t)}\left(2\frac{J_0(t)}{J_0^*(t)} - 1\right)$$

其中 $f(t) = \dfrac{J_2(t)}{J_1(t)}$. 故 $J_0^*(t) = J_0^*(z_0)\exp\left(-\int_{z_0}^{t}\dfrac{g(u)}{u}\mathrm{d}u\right)$，其中 $g(t) = \dfrac{t}{f(t)}\left(2\dfrac{J_0(t)}{J_0^*(t)} - 1\right)$. 注意到 $f'(t) = -1 + \dfrac{J_0(t)}{J_0^*(t)} \to \dfrac{1}{\alpha-2}$，$g(t) \to \dfrac{\alpha}{\alpha-2}(\alpha-2) = \alpha$.

由文献[4]的 Karamata 公式可知，$J_0^*(t) \in RV_{-\alpha}$. 假设式(7)对于整数 $0 < p < \alpha - 2$ 成立，定义

$$J_p^*(t) = \frac{(J_{p+1}(t))^2}{J_{p+2}(t)}$$

那么有

$$\frac{J_p(t)}{J_p^*(t)} \to \frac{\alpha-p-1}{\alpha-p-2}$$

与 $p=0$ 的方法相同，很容易得到 $J_p(t) \in RV_{-(\alpha-p)}$. 由式(6)和引理1，得 $J_{P-1} \in RV_{-(\alpha-p)-1}$. 将上述步骤重复 p 次，就得到 $1 - F(\exp(t)) = J_0(t) \in RV_{-\alpha}$.

假设对实数 $0 < p < \alpha - 2$ 式子(7)成立. 与 p 为整数时情况相同，有 $J_p(t) \in RV_{-(\alpha-p)}$. 不失一般性，设 $0 < p < 1$. 在 $\delta \geqslant -1$，$\alpha > \delta + p + 1$ 情况下，有

$$J_{\delta+p+1}(t) = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\int_t^{\infty}(u-t)^{\delta}J_p(u)\mathrm{d}u = \frac{t^{\delta+1}}{\Gamma(\delta+1)}\int_t^{\infty}(y-1)^{\delta}J_p(ty)\mathrm{d}y$$

因此，

$$\frac{J_{\delta+p+1}(tx)}{t^{\delta+1}J_p(t)} = \frac{x^{\delta+1}}{\Gamma(\delta+1)}\int_1^{\infty}(y-1)^{\delta}\frac{J_p(txy)}{J_p(t)}\mathrm{d}y \to \frac{x^{-\alpha+p+1+\delta}}{\Gamma(\delta+1)}\int_1^{\infty}(y-1)^{\delta}y^{-\alpha+p}\mathrm{d}y = x^{-\alpha+p+1+\delta}\frac{\Gamma(\alpha-p-\delta-1)}{\Gamma(\alpha-p)}$$

因此，$J_{\delta+p+1}(t) \in RV_{-\alpha+p+1+\delta}$. 如果 $\delta = -p > -1$，那么 $J_1(t) \in RV_{-(\alpha-1)}$，可得

$$1 - F(\exp(t)) = J_0(t) \in RV_{-\alpha}$$

证毕.

定理2 若 $0 < x_F < \infty$，定义

$$\mu_p(t) = E\left\{\left(\left(-\log\left|\frac{X}{r(F)}\right|\right) - \frac{1}{t}\right)^p \,\middle|\, \left(-\log\left|\frac{X}{r(F)}\right|\right) > \frac{1}{t}\right\}$$

如果 $F \in D_p(H_2, \alpha)$，$\alpha > 2$，那么对于 $0 \leqslant p < \alpha - 2$，$\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且 $t \to \infty$ 时，

$$\frac{\mu_p(t)\mu_{p+2}(t)}{\{\mu_{p+1}(t)\}^2} \to \frac{(p+2)(-\alpha-p-1)}{(p+1)(-\alpha-p-2)} \tag{8}$$

反之，当 $\alpha > 2$ 时，对 $0 \leqslant p < \alpha - 2$，如果 $\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且式子(8)成立，那么 $F \in D_p(H_2, \alpha)$.

证 必要性相的证明似于定理1中(4)的证明，利用文献[2]中定理2.2给出的 $F \in D_p(H_2, \alpha)$ 充要条件为当 $y > 0$ 时，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1 - F\left(r(F)\exp\left(-\dfrac{y}{t}\right)\right)}{1 - F\left(r(F)\exp\left(-\dfrac{1}{t}\right)\right)} = y^{\alpha}$$

对充分性，定义

$$J_p(t)=\{\Gamma(p+1)\}^{-1}\int_{r(F)\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}^{r(F)}\left(\left(-\log\left|\frac{X}{r(F)}\right|\right)-\frac{1}{t}\right)^p \mathrm{d}F(x)$$

则

$$\int_t^{\infty}(u-t)^{\delta}J_p\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\Gamma(\delta+1)J_{\delta+p+1}\left(\frac{1}{t}\right) \tag{9}$$

类似于定理 1 的证明方法，可得结论成立.

定理 3　若 $r(F)=0$，定义

$$\mu_p(t)=E\{((\log|-X|)+t)^p \mid (\log|-X|)>-t\}$$

如果 $F\in D_p(H_3,\alpha)$，$\alpha>2$，那么对于 $0\leqslant p<\alpha-2$，$\mu_{p+2}(t)<\infty$ 且 $t\to\infty$ 时，

$$\frac{\mu_p(t)\mu_{p+2}(t)}{\{\mu_{p+1}(t)\}^2}\to\frac{(p+2)(\alpha-p-1)}{(p+1)(\alpha-p-2)} \tag{10}$$

反之，当 $\alpha>2$ 时，对 $0\leqslant p<\alpha-2$，如果 $\mu_{p+2}(t)<\infty$ 且式(10) 成立，那么 $F\in D_p(H_3,\alpha)$.

证　必要性的证明类似于定理 1 中(4) 式的证明，利用文献[2] 中定理 2.3 关于 $F\in D_p(H_3,\alpha)$ 的充要条件为当 $y>0$ 时，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F(-\exp(-ty))}{1-F(-\exp(-t))}=y^{-\alpha}$$

证得(10) 式成立. 对充分性，定义

$$J_p(t)=\{\Gamma(p+1)\}^{-1}\int_{-\exp(-t)}^{0}((\log|-x|)+t)^p\mathrm{d}F(x)$$

则

$$\int_t^{\infty}(u-t)^{\delta}J_p(u)\mathrm{d}u=(-1)^{\delta+1}\Gamma(\delta+1)J_{\delta+p+1}(t) \tag{11}$$

类似于定理 1 的证明方法，可得结论成立.

定理 4　若 $r(F)<0$，定义

$$\mu_p(t)=E\left\{\left(\left(-\log\left|\frac{X}{r(F)}\right|\right)+\frac{1}{t}\right)^p \;\middle|\; \left(-\log\left|\frac{X}{r(F)}\right|\right)>-\frac{1}{t}\right\}$$

如果 $F\in D_p(H_4,\alpha)$，$\alpha>2$，那么对于 $0\leqslant p<\alpha-2$，$\mu_{p+2}(t)<\infty$ 且 $t\to\infty$ 时，

$$\frac{\mu_p(t)\mu_{p+2}(t)}{\{\mu_{p+1}(t)\}^2}\to\frac{(p+2)(-\alpha-p-1)}{(p+1)(-\alpha-p-2)} \tag{12}$$

反之，当 $\alpha>2$ 时，对 $0\leqslant p<\alpha-2$，如果 $\mu_{p+2}(t)<\infty$ 且式(12) 成立，那么 $F\in D_p(H_4,\alpha)$.

证　必要性的证明类似于定理 1 中(4) 式的证明，利用文献[2] 中定理 2.4 关于 $F\in D_p(H_4,\alpha)$ 的充要条件为当 $y>0$ 时

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F\left(r(F)\exp\left(\frac{y}{t}\right)\right)}{1-F\left(r(F)\exp\left(\frac{1}{t}\right)\right)}=y^{\alpha}$$

可证得(12) 式成立. 对充分性，定义

$$J_p(t)=\{\Gamma(p+1)\}^{-1}\int_{r(F)\exp\left(\frac{1}{t}\right)}^{r(F)}\left(\left(-\log\left|\frac{x}{r(F)}\right|\right)+\frac{1}{t}\right)^p\mathrm{d}F(x)$$

则

$$\int_t^{\infty}(u-t)^{\delta}J_p\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=(-1)^{\delta+1}\Gamma(\delta+1)J_{\delta+p+1}\left(\frac{1}{t}\right) \tag{13}$$

类似于定理 1 的证明方法，可得结论成立.

定理 5　若 $r(F)>0$，定义

$$\mu_p(t)=E\left\{\left(\left(\log\left|\frac{X}{t}\right|\right)-f(t)\right)^p \;\middle|\; \left(\log\left|\frac{X}{t}\right|\right)>f(t)\right\}$$

如果 $F \in D_p(\Phi)$，那么对于 $p \geqslant 0$，$\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且当 $t \uparrow r(F)$ 时，

$$\frac{\mu_p(t)\mu_{p+2}(t)}{\{\mu_{p+1}(t)\}^2} \to \frac{p+2}{p+1} \tag{14}$$

反之，对 $p \geqslant 0$，如果 $\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且式(14)成立，那么 $F \in D_p(\Phi)$.

证 必要性的证明：由文献[2]定理2.5可知，$F \in D_p(\Phi)$ 的等价条件为当 $r(F) > 0$ 时，存在一个函数 $f > 0$，使得对于 $x \in \mathrm{R}$，

$$\lim_{t \to r(F)} \frac{1-F(t\ \exp(xf(t)))}{1-F(t)} = \exp(-x)$$

成立. 在此条件下，对某些连续函数 f，定义

$$f(t) = \frac{1}{\overline{F}(t)}\int_t^{r(F)} \frac{\overline{F}(s)}{s}\mathrm{d}s$$

有

$$\int_t^{r(F)} \frac{\overline{F}(x)}{x}\mathrm{d}x < \infty$$

因此有

$$\begin{aligned}\mu_p(t) = & E\left\{\left(\left(\log\left|\frac{X}{t}\right|\right) - f(t)\right)^p \,\middle|\, \left(\log\left|\frac{X}{t}\right|\right) > f(t)\right\} = \\ & p(f(t))^p \int_1^{\frac{\log\left|\frac{r(F)}{t}\right|}{f(t)}} \frac{1-F(t\exp(yf(t)))}{1-F(t\exp(f(t)))}(y-1)^{p-1}\mathrm{d}y \sim \\ & \Gamma(p+1)(f(t))^p,\ t \uparrow r(F)\end{aligned} \tag{15}$$

由 $f(t)$ 的表达式可知

$$\frac{\log\left|\frac{r(F)}{t}\right|}{f(t)} - 1 \to \infty (t \uparrow r(F))$$

故(15)式中的渐近式成立. 显然，式(15)对 $p=0$ 也成立. 由式(15)，可证式(14)成立.

对于充分性的证明，首先定义

$$J_p(t) = \{\Gamma(p+1)\}^{-1}\int_{t\exp(f(t))}^{r(F)} \left(\left(\log\left|\frac{x}{t}\right|\right) - f(t)\right)^p \mathrm{d}F(x) \qquad t < r(F)$$

另外记

$$g_1(t) = \log(t) + f(t)$$

类似于式(5)的方法，可得

$$\int_t^\infty (u - g_1(t))^\delta J_p(g_1^{\leftarrow}(u))\mathrm{d}u = \Gamma(\delta+1)J_{\delta+p+1}(g_1(t)) \tag{16}$$

类似于定理1的证明过程，可得结论成立.

定理6 若 $r(F) \leqslant 0$，定义

$$\mu_p(t) = E\left\{\left(\left(\log\left|\frac{X}{t}\right|\right) + f(t)\right)^p \,\middle|\, \left(\log\left|\frac{X}{t}\right|\right) > -f(t)\right\}$$

如果 $F \in D_p(\Psi)$，那么对于 $p \geqslant 0$，$\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且当 $t \uparrow r(F)$ 时，

$$\frac{\mu_p(t)\mu_{p+2}(t)}{\{\mu_{p+1}(t)\}^2} \to \frac{p+2}{p+1} \tag{17}$$

反之，对 $p \geqslant 0$，如果 $\mu_{p+2}(t) < \infty$ 且(17)式成立，那么 $F \in D_p(\Psi)$.

证 必要性的证明：由文献[2]定理2.6可知，$F \in D_p(\Psi)$ 的等价条件为当 $r(F) \leqslant 0$ 时，存在一个函数 $f > 0$ 使得对于 $x \in \mathrm{R}$，有

$$\lim_{t \to r(F)} \frac{1-F(t\exp(xf(t)))}{1-F(t)} = \exp(x)$$

成立. 在此条件下，对某些连续函数 f，定义

$$f(t) = -\frac{1}{\overline{F}(t)}\int_t^{r(F)} \frac{\overline{F}(s)}{s}\mathrm{d}s$$

有

$$-\int_t^{r(F)} \frac{\overline{F}(x)}{x}\mathrm{d}x < \infty$$

成立. 因此有，

$$\mu_p(t) \sim \Gamma(p+1)(-f(t))^p \qquad r \uparrow r(F) \tag{18}$$

由(18)式，可证(17)式成立.

对于充分性的证明，首先定义

$$J_p(t) = \{\Gamma(p+1)\}^{-1}\int_{t\exp(-f(t))}^{r(F)} \left(\left(\log\left|\frac{x}{t}\right|\right) + f(t)\right)^p \mathrm{d}F(x) \qquad t < r(F)$$

类似于定理5，记 $g_2(t) = \log(t) - f(t)$，则

$$\int_t^{\infty} (u - g_2(t))^{\delta} J_p(g_2^{\leftarrow}(u))\mathrm{d}u = \Gamma(\delta+1) J_{\delta+p+1}(g_2(t)) \tag{19}$$

同理可证得结论成立.

参考文献：

[1] PANTCHEVA E. Limit Theorems for Extreme Order Statistics Under Nonlinear Normalization [M]// KALASHNIKOV V V, ZOLOTATEV V M. Stability Problems for Stochastic Models. Berlin: Springer, 1985: 284-309.

[2] MOHAN N R, RAVI S. Max Domains of Attraction of Univariate and Multivariate P-Max Stable Laws [J]. Theory of Probability and Its Applications, 1993, 37(4): 632-643.

[3] PENG Z X, SHUAI Y L, NADARAJAH S. On Convergence of Extremes Under Power Normalization [J]. Extremes, 2013, 16(3): 285-301.

[4] RESNICK S I. Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes [M]. New York: Springer-Verlag, 1987.

[5] GELUK J L. On The Domain of Attraction of exp (-exp (-x)) [J]. Statistics and Probability Letters, 1996, 31(2): 91-95.

Conditions Based on Conditional Moments for p-Max Stable Laws Conditional Moment Characterization of Limit Distribution Under Power Normalization

PENG Xi, ZHOU Wei, PENG Zuo-xiang

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Let $\{X_n\}$ be independent and identically distributed random variables with the common distribution function $F(x)$. Necessary and sufficient conditions for F belonging to the domains of attraction of $H_{1,\alpha}$, $H_{2,\alpha}$, $H_{3,\alpha}$, $H_{4,\alpha}$, $\psi(x)$ and $\Phi(x)$ with nondegenerate univariate marginals under power normalization are derived in terms of conditional moments.

Key words: limit distribution under power normalization; conditional moment; domain of attraction

责任编辑　张　枸